Documento de Trabajo

8 8 1 1

APLICACIONES DE LA TEORIA DEL CONTROL OPTIMO EN EL MARKETING

Miguel Martín Dávila

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES - UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Nº C → X-53-229010-X

Nº E → 5307402598

APLICACIONES DE LA TEORIA DEL CONTROL OPTIMO EN EL MARKETING

Por: Miguel Martín Dávila

División de *Comercialización e Investigación de Mercados*, de la Universidad Complutense de Madrid

I. INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es el de discutir la presencia de la denominada Teoría del Control Optimo en la modelización en el Marketing, ilustrándola con algunas de sus aplicaciones más sobresalientes.

Nuestro interés se centra, fundamentalmente, en poner de manifiesto las posibilidades de la metodología, en contraste con su escasa difusión hasta el momento presente como instrumento de apoyo para la toma de decisiones de Marketing.

Comenzaremos en la sección siguiente introduciendo los elementos de la teoría del control, en particular en el ámbito de los sistemas *continuos*, para preparar la discusión posterior de las técnicas principales de optimización.

II. EL PROBLEMA DEL CONTROL OPTIMO

Como contraposición a otra clase de problemas de decisión caracterizados porque las decisiones a tomar estan referidas a un único momento t en el tiempo, los cuales podríamos denominar *problemas estáticos*, la teoría del control trata de aquellos otros (problemas *dinámicos*) en los que las decisiones se refieren a una colección de momentos: t_0, t_1, ..., T, ó a un intervalo $[t_0, T]$, siendo T el *horizonte* de planificación de la decisión (eventualmente podría ser $T = \infty$).

Nosotros discutiremos sólo aquellos problemas en los que la decisión hay que tomarla a lo largo de todo un intervalo temporal (problemas contínuos), frente a los que se caracterizan porque las decisiones han de tomarse en una secuencia de instantes en el tiempo (problemas discretos).

En relación a los primeros, el problema básico de la teoría del control óptimo, al que nos podríamos referir como el <u>Problema Dinámico Estándar</u> (Naylor y Vernon 1969, p. 282; Connors y Teichroew 1967, p. 15):

(1) Optimizar[1] el *funcional*[2]

$$\phi = \int_{t_0}^{T} Z[Y_1(t), \ldots, Y_m(t); X_1(t), \ldots, X_n(t); t]\, dt,$$

1. Es decir maximizar o minimizar.

2. Mientras que el argumento de una *función* es un escalar o un vector, el de un *funcional* es otra función.

sujeto a:

$$(2) \qquad \frac{dY_i(t)}{dt} = f_i[Y_1(t), \ \ldots, Y_m(t); \ X_1(t), \ \ldots, X_n(t); \ t],$$

con

$$(3) \qquad Y_i(t_0) = Y_i^0,$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$; y

$$(4) \qquad [X_1(\bullet), \ \ldots, \ X_n(\bullet)] \in \Omega.$$

Cada una de las variables $Y_i(t)$ se denomina individualmente una *variable de estado*, y el conjunto de las m variables se conoce como la *trayectoria* del sistema.

Por otra parte, las variables $X_j(t)$ se denominan las *funciones de control* y mediante su selección, de un conjunto Ω de funciones *admisibles*, se determinaría el comportamiento del proceso, gobernado por del sistema de ecuaciones diferenciales (2).

La planificación se extendería entre los instantes t_0 y T, y el problema de control óptimo consistiría en seleccionar un conjunto de funciones de control $X_j(t)$, j = 1, ..., n, admisibles, de manera que junto con la trayectoria conformada por las funciones $Y_i(t)$, i = 1,

En la sección siguiente ilustraremos este tipo de problemas de optimización con algunas aplicaciones elementales a la toma de decisiones en el Marketing.

III. EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE CONTROL OPTIMO EN EL MARKETING

Para ilustrar los elementos de los poblemas de control óptimo introducidos en la sección anterior vamos a considerar en primer lugar un caso especial del modelo publicitario de Nerlove y Arrow (1962), discutido por Sethi y Thompson (1981, pp. 5-7), el cual podría plantearse de la siguiente manera:

$$(5) \quad \text{Maximizar } \left\{ \phi = \int_0^\infty [\pi(G) - u]\, e^{-\alpha t}\, dt \right\}$$

sujeto a

$$(6) \quad \frac{dG(t)}{dt} = u(t) - \theta\, G(t),$$

con

$$(7) \quad G(0) = G_0; \quad y$$

$$(8) \quad 0 \leq u(\bullet) \leq Q.$$

En el planteamiento anterior el significado de cada uno de los simbolos empleados se muestra a continuación:

- $G(t)$ = Reputación (goodwill) originada por la publicidad.

- $u(t)$ = Tasa publicitaria.

- $\pi(G)$ = Tasa de beneficio.

- Θ = Constante de declive de la reputación publicitaria.

- α = Tipo de descuento.

- Q = Cota superior de la tasa publicitaria.

- G_0 = Nivel inicial de la reputación publicitaria.

El problema de control óptimo consiste, por lo tanto, en determinar la tasa a la cual debe anunciarse el producto en cada instante t.

Como se puede observar facilmente hay una absoluta correspondencia entre las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), del planteamiento general de la sección anterior, y la secuaciones (5), (6), (7) y (8) del plantemiento particular del modelo publicitario de Nerlove y Arrow.

En particular, pues, en este modelo la variable de *estado* viene representada por la *reputación* originada por la publicidad, $G(t)$, la cual mediría, de alguna manera, el grado de conocimiento y difusión del producto y su imagen entre los posibles compradores.

Se supone, además, que hay que tener en cuenta también un coeficiente Θ, que se podría calificar de coeficiente de *olvido*, mediante el cual se establecería la tasa con la cual los consumidores *tenderían a olvidar* el producto.

Para contratacar frente a dicho olvido se procedería a llevar a cabo la campaña publicitaria con una intensidad que, en cada momento t, vendría dada por la variable de control u(t). De ahí que se plantee la *ecuación de estado* (6), siendo G_0 el nivel inicial de la reputación del producto.

Respecto a la función objetivo propuesta se observa que ya que $T = \infty$, se trata de un problema con un *horizonte ilimitado*. En ese sentido la introducción del factor de descuento (continuo) $e^{-\alpha t}$, en donde α representa el tipo de descuento para el intervalo de tiempo unitario, previene la divergencia de la integral infinita de (5), a la vez que introduce una condición de realismo al contraer progresivamente los beneficios, en tanto se obtengan en momentos cada vez más alejados en el tiempo.

El resto del integrando de la función objetivo consiste en la tasa de beneficio $\pi(G)$, minorada por el coste originado por la tasa publicitaria u(t), el cual se considera proporcional (con constante de proporcionalidad igual a 1) a dicha tasa u.

Naturalmente, para una discusión más en detalle de la resolución del problema se precisaría, en primer lugar, la concreción de cada una de las constantes: Θ, G_0, Q y α, así como la especificación de la función que expresa la tasa de beneficio en función de G, $\pi(G)$.

Pero, además, también se exigiría la aplicación de una metodología adecuada para la obtención del control óptimo. Des estas metodologías nos ocuparemos en la sección siguiente.

Antes de finalizar esta sección, sn embargo, y con el objeto de mostrar una discusión en forma explícita de un problema de control óptimo consideraremos un modelo simple, introducido por Vidale y Wolfe (1957), y discutido por Teichroew (1964, pp. 228-231) y por Naylor y Vernon (1969, pp. 284-285), que no incluye el planteamiento de una función objetivo y que involucra una única ecuación diferencial en una sola variable.

El modelo se refiere a un mercado en regimen de monopolio, en el que se vende un determinado producto a un precio P, y de manera que dicho mercado no puede absorber más de M unidades monetarias de producto por unidad de tiempo, sino hubiera reducciones de dicho precio.

Bajo las hipótesis de este modelo simple, si la empresa monopolísta no realizara ninguna campaña publicitaria se supone que su tasa de ventas en el instante t, representada por S(t), decrecería con una tasa Θ (> 0) proporcional a la tasa de las ventas en dicho instante. De acuerdo con esta hipótesis se postula entonces que el cambio en la tasa de ventas se puede formular mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$(9) \qquad \frac{dS(t)}{dt} = -\Theta\, S(t).$$

Si $S(t) = S_0$, cuando $t = 0$, entonces se puede demostrar que la solución de la ecuación diferencial (9) viene dada por la función:

$$(10) \qquad S(t) = S_0 \quad e^{-\Theta t}.$$

La función dada por (10), a la que podemos referirnos como la *solución* de (9), expresa que las ventas decrecen de unamanera *exponencial* a lo largo del tiempo, con una intensidad que dependería de la magnitud de la constante Θ.

Pero, al igual que en el modelo simplificado de Nerlove y Arrow presentado antes, se supone que dicho tendencia decreciente en las ventas podría retenerse, e incluso podría invertirse, mediante la realización de una campaña publicitaria.

A este respecto se supone que la tasa de ventas se incrementaría a una tasa proporcional a la tasa publicitaria, aunque con la matización de que dicho incremento afcetaría únicamente a aquella proporción del mercado (total), caracterizado por el gasto máximo M, que se se hubiera aprovisionado ya del producto.

Bajo estas hipótesis si se denota:

(11) $A(t)$ = Tasa publicitaria en el instante t.

(12) μ = Constante (> 0) de proporcionalidad que mide el impacto de la publicidad sobre las ventas.

(13) $[1 - (S(t)/M)]$ = Parte del mercado afectada por la publicidad,

entonces se podría poner:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\theta S(t) + \mu A(t) [1 - (S(t)/M)]. \tag{14}$$

Con este nuevo planteamiento tendríamos ahora una variable de estado, $S(t)$, y una variable de control $A(t)$.

En función de la tasa publicitaria $A(t)$, que representaremos simplemente por A, y suponiendo de nuevo que $S(0) = S_0$, entonces la solución de la ecuación diferencial (14) vendría dada por:

$$S(t) = \frac{M\mu A}{M\nu + \mu A} + \left[S_0 - \frac{M\mu A}{M\nu + \mu A} \right] e^{-[\theta + (\mu A/M)]t} \tag{15}$$

El ejecutivo de marketing podría ahora evaluar analíticamente el efecto sobre las ventas de políticas altenativas de publicidad, para seleccionar la más conveniente.

Por ejemplo, una política publicitaria podría consistir en mantener una tasa publicitaria constante durante un cierto periodo, y luego suprimir la publicidad. En ese caso, si denotamos por a la cantidad total invertida en publicidad durante dicho periodo, y consideramos que éste viene dado por el intervalo [0, T], entonces la función de control A(t) se definiría de la siguiente manera:

$$(16) \qquad A(t) = a/T, \text{ si } 0 \leq t \leq T; \\ = 0, \text{ si } T < t.$$

Y de la expresión general (14) se seguiría que el comportamiento de las ventas a lo largo del tiempo, para la anterior política publicitaria, vendría dado por la función:

$$(17) \qquad S(t) = \frac{M\mu a}{TM\mu + \mu a} + \left[S_0 - \frac{M\mu a}{TM\mu + \mu a} \right] e^{-\left[\theta + (\mu a/TM)\right]t}$$

si $0 \leq t \leq T$, y

$$= S(T)\, e^{-\theta(t-T)},$$

si $T < t$,

ya que para $t > T$ se aplicaría la solución dada por (10).

La gráfica de la función S(t) dada por (17) se muestra en la figura 1.

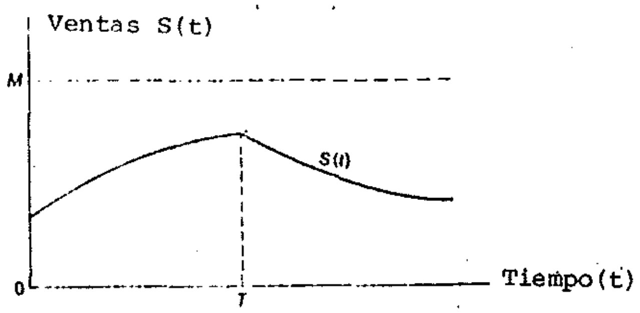

Figura 1. Comportamiento de las Ventas para diferentes políticas publicitarias

Fuente: Naylor y Vernon, Microeconomics and Decisions Models of the Firm, p. 285.

Así se podría experimentar con diferentes valores de a y T, para analizar su impacto en las ventas, sopesando luego dicho impacto con algún criterio mediante el cual se combinara el beneficio proporcionado por éstas con los costes de la política publicitaria.

Esta discusión, sin embargo, no resuelve, como hemos anticipado, el problema de la obtención de la política de control óptima para un cada criterio dado. De los métodos generales para abordar este problema nos ocuparemos en la sección siguiente.

IV. METODOS DE CARACTERIZACION DE CONTROLES OPTIMOS

La resolución del problema general de control óptimo planteado en la sección II se puede llevar a cabo mediante la aplicación de una de las siguientes metodologías: a) El Cálculo de Variaciones , b) La aplicación del Principio de Optimalidad de R. Bellman, y c) La aplicación del Principio de Máximo de L. S. Pontryagin.

Puesto que la obtención y justificación rigurosa de las condiciones caracterizadoras de los controles óptimos que proporcionan cada uno de los anteriores enfoques es extraordinariamente compleja y desbordaría los objetivos perseguidos en este trabajo, nos limitaremos a resumir brevemente sus aspectos más destacados, de acuerdo a la que se suele plantear convencionalmente en la mayoría de los textos de carácter introductorio[3], con el fin de poder analizar luego su aplicabililidad y alcance en algunos modelos de control desarrollados en el marketing.

a) Cálculo de Variaciones

La metodologia de optimización representada por el Cálculo de Variaciones, que es el enfoque históricamente más antiguo de los tres citados, se puede considerar una generalización de las condiciones necesarias de optimalidad de las funciones derivables al caso de *funcionales.*

Para ilustrarla considerararemos el denominado *problema clásico del Cálculo de Variaciones*, el cual se plantea de la siguiente manera:

$$(18) \qquad \text{Máx} \quad \phi = \int_{t_0}^{T} Z[y(t),\ \dot{y}(t),\ t]\, dt,$$

sujeto a:

(19) $y(t_0) = y_0$

$y(T) = y_1$

y en donde, por convenio: $\dot{y}(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$.

La función Z se supone una función continuamente diferenciable de sus argumentos, y t_0, T, y_0 y y_1, son parámetros dados.

El problema (18) puede considerarse un caso especial del problema de control óptimo planteado en la sección II, en el que hay una única variable de estado $Y_1(t) = y(t)$, y una única variable de control $X_1(t) = \dot{y}(t)$, que coincide simplemente con la derivada respecto al tiempo de al variable de estado.

Si $y^*(t)$ denota la *trayectoria* óptima, mediante al consideración de trayectorias *perturbadas* alrededor de la anterior trayectoria, dadas por las expresiones:

(20) $y^*(t) + \tau \quad \beta(t)$,

en donde $\beta(t)$ representa una función arbitraria, bajo ciertas condiciones terminales, y τ es un parámetro arbitrariamente pequeño, se puede demostrar (Intriligator 1971, p. 310) que la función y^* ha de satisfacer la

3. Por ejemplo en el de M. D. Intriligator (1971, pp. 306-367).

siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Z}{\partial \dot{y}}\right] = 0, \qquad (21)$$

en donde el símbolo ∂ denota *derivación parcial*.

A la ecuación (21) se la denomina *ecuación de Euler*, en honor de su descubridor, y permitiría caracterizar a las trayectorias óptimas $y^*(t)$ como sus soluciones.

Esta ecuación es generalizable al caso en que tanto $y(t)$ como $\dot{y}(t)$ son funciones vectoriales, lo que amplia considerablemente su ámbito de aplicación.

b) Principio de Optimalidad de Bellman

El citado *Principio de Optimalidad* establece que:

- Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y la decisión (es decir el control), las resatntes decisiones que componen la política óptima deben constituir a su vez una política óptima respecto al estado resultante de la primera decisión (Bellman 1957).

La colección de técnicas matemáticas que se derivan de la aplicación del anterior Principio se conocen bajo la denominación de *Programación Dinámica*.

Al contrario que los problemas que se abordan mediante el Cáculo de Variaciones o el Principio de Máximo de Pontryagin, no se puede decir que exista un *problema estándar* de *Programación Dinámica*.

Hillier y Lieberman (1967, pp. 243-244) han resumido los aspectos básicos que caracterizan la aplicación de la Programación Dinámica a la resolución de problemas de optimización en los siguientes:

1. El problema a resolver puede dividirse en etapas, de manera que se requiere una decisión en cada etapa.
2. Cada etapa posee un determinado número de estados asociados a ella.
3. El efecto de la toma de una decisión en cada etapa es el de transformar el estado actual en otro estado de los asociados con la siguiente etapa.
4. Dado un determinado estado actual, una política óptima para las etapas siguientes es independiente de la política adoptada en las etapas previas.
5. El procedimiento de solución comienza mediante la obtención de la política óptima para cada estado de la última etapa.
6. Se puede plantear una relación recursiva mediante la cual se puede identificar la política óptima para un estado respecto del cual queden n etapas por cubrir, considerando cada una de las políticas óptimas para cada estado respecto al cual queden (n-1) etapas por cubrir.
7. Empleando dicha relación recursiva, el procedimiento de solución se desarrolla *hacia atrás*, etapa a etapa, de manera que en cada fase se determina la política óptima a partir de cada uno de los estados de la etapa, hasta que se lograría obtener la política óptima en el momento en que el estado bajo consideración fuera precisamente el estado inicial.

Como resultado de aplicar las anteriores reglas a un problema de control óptimo tal como el planteado en la seción II, se obtendría (Intriligator 1971, p. 329) la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$(22) \qquad -\frac{\partial \phi^*}{\partial t} = \underset{\{X(t)\}}{\text{Máx}} \left[Z(Y,X,t) + \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \bullet f(Y,X,t) \right]$$

en donde:

$Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$,

$X = (X_1, \ldots, X_n)$, y

$f = (f_1, \ldots, f_m)$,

y representado ϕ^* el valor óptimo de ϕ.

A la ecuación (22) se la denomina *Ecuación de Bellman*, y se puede interpretar como la Ecuación recursiva mediante la cual se determinarían el control y la trayectoria óptimos.

c) <u>Principio de Máximo de Pontryagin</u>

Mediante este Principio se establecen uns condiciones necesarias de optimalidad para las trayectorias óptimas recurriendo a la definición de una función auxiliar denominada la *Hamiltoniana*.

En cierto sentido se puede afirmar que este Principio representa una generalización al caso dinámico de las *condiciones de Kuhn-Tucker* (Naylor y Vernon, p. 149 y ss.) del caso estático.

Para plantear estas condiciones necesarias se define en primer lugar una nueva variable de estado $Y_{m+1}(t)$ mediante la ecuación:

$$(23) \qquad Y_{m+1}(t) = \int_{t_0}^{t} Z[Y(z), X(z), z]\, dz,$$

de manera que el problema de optimización se convertiría en el de optimizar la función:

$$(24) \qquad \phi = \sum_{i=1}^{m+1} C_i \; Y_i(T),$$

con $C_i = 0$, para $i = 1, \ldots, m$; y $C_{m+1} = 1$.

En las condiciones anteriores, la función Hamiltoniana H se plantearía introduciendo m funciones $W_1(t), \ldots, W_m(t)$, satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$(25) \qquad H = \sum_{i=1}^{m} W_i \; f_i,$$

$$(26) \qquad \frac{dW_i}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial Y_i} = -\sum_{i=1}^{m} W_i \frac{\partial f_i}{\partial Y_i},$$

para $i = 1, \ldots, m$; y finalmente, las condiciones necesarias para que la función objetivo ϕ tuviera un extremo (máximo ó mínimo) se establecerían por medio de las siguientes ecuaciones:

$$(26) \qquad \frac{\partial H}{\partial X_j} = 0; \quad j = 1, \ldots, n.$$

En la siguiente sección mostraremos los resultados de la aplicación de este Principio a los dos modelos de control del efecto publicitario discutidos en la sección III.

V. CONTROLES OPTIMOS DE LA EFICACIA PUBLICITARIA EN EL MARKETING

Empezaremos discutiendo primeramente el control óptimo en el modelo definido mediante las ecuaciones (5), (6), (7) y (8).

Modelo Publicitario de Nerlove y Arrow

Para obtener el control óptimo en este modelo, y de acuerdo con la metodología propuesta por el Principio de Máximo, se formaría la función Hamiltoniana siguiente:

$$(27) \qquad H = \pi(G) - u + W\,[u - \Theta\, G],$$

en donde W representa la variable (adjunta) auxiliar introducida.

Imponiendo las condiciones necesarias de optimalidad que se plantean mediante las ecuaciones (26) se podría demostrar (Sethi y Thompson 1981, p. 187 y ss.) que en el óptimo se debería de cumplir que el cociente entre la *reputación publicitaria* G y los ingresos por ventas, dados por pS, en dónde p representaría el precio de venta unitario[4], y sería inversamente proporcional a la elasticidad del precio y a la suma del *coste de oprtunidad marginal* de la inversión, dado por el producto W $(\alpha+\Theta)$, y a la tasa de cambio de la contribución potencial al beneficio de una *unidad de reputación*, dada por $(-\dot{W})$.

Para los detalles de la obtención de este resultado nos remitimos al texto de Sethi y Thompson (1981), en el que se discute también una extensión no lineal del modelo.

Modelo Publicitario de Vidale y Wolfe

Como se observa de la exposición que hemos desarrollado en la sección III, la diferencia más importante que presenta este modelo con el de Nerlove-Arrow reside en la posibilidad de *saturación* del mercado, representada por la variable M.

Además hay que señalar también que, tal como se ha introducido dicho modelo, no se ha planteado en términos de la obtención de un determinado control óptimo, pues no se ha introducido ninguna función objetivo, sino simplemente a efctos de la experimentación de diferentes políticas publicitarias.

Para replantearlo como un problema de control óptimo

4. El beneficio se supone planteado como la diferencia: p S(G) - c(S), en donde c(S) representa el coste total.

Sethi (1973) propone introducir la siguiente función objetivo:

$$(28) \qquad \phi = \int_{t_0}^{T} (\pi z - A)\, e^{-\alpha t}\, dt,$$

en donde z representa la *cuota de mercado*, es decir el cociente S/M, π denota las ventas máximas, correspondientes a: $z = 1$, y α denota como en el modelo de Nerlove-Arrow, el tipo de descuento unitario.

Por otra parte se puede suponer además que hay una cota superior Q, al gasto publicitario por unidad de tiempo y que se pretende lograr en el instante terminal T una cuota de mercado z_T.

Como muestran Sheti y Thompson las diferentes formas de las trayectorías óptimas dependen fundamentalmente de los valores de Q y z_T (1981, pp. 197 y ss.).

En particular, en el caso de que se pueda suponer $Q = \infty$, se demuestra, mediante la aplicación del Principio de Máximo de Pontryagin, que la política publicitaria óptima A(t) se mantiene constante durante cierto subintervalo del intervalo $[t_0, T]$.

Pero puesto que la discusión en detalle de la obtención de las trayectorias óptimas es compleja, y nuestro objetivo en este trabajo se circunscribe a una introducción a las aplicaciones de la teoría del control óptimo en el marketing, terminamos aquí el análisis de este modelo publicitario para discutir brevemente en la sección una panorámica general de dichas aplicaciones.

VI. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Aunque no con la amplitud de otras técnicas, a partir de los años 1960s han realizado numerosas aplicaciones de la Teoría del Control Optimo en la Ciencia de la Gestión, como lo prueban textos tan representativos como los de Bensoussan, Hurst y Näslund (1974), Tapiero (1977) y Sheti y Thompson (1981).

Pero, sin embargo su aplicación en el Marketing ha sido escasa en relación a las aplicaciones en otras áreas como las de producción y finanzas.

Como señalan Lilien y Kotler (1983, p. 172), el empleo de la teoría del control en el Marketing se ha circunscrito principalmente en las deciciones publicitarias.

Y por otra parte hay que decir también que dicha teoría se ha empleado además, primordialmente, para deducir la estructura teórica de las políticas óptimas, más que con el objetivo de aproximarlas empíricamente.

Por lo que se refiere a las aplicaciones en publicidad además de los dos modelos ya citados, de Nerlove-Arrow y Vidale-Wolfe, merecen citarse también los modelos dinámicos del tipo de Lanchester (Lilien y Ruzdic 1982), que, al contrario que los anteriores, introducen aspectos competitivos en la discusión de la fijación de la spolíticas óptimas.

Sin embargo, se puede afirmar que, a la vista del desarrollo de las aplicaciones de la teoría del control en la resolución de problemas de gestión empresarial y de su potenciación mediante el empleo de técnicas de simulación (Coyle 1977) se ofrece un futuro prometedor a las posibilidades de esta metodología en el apoyo a la toma de decisiones comerciales.

BIBLIOGRAFIA

BELLMAN, R., (1957), Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton (NJ).

BENSOUSSAN, A., HURST, E. G. (Jr) y NASLUND, B., (1974), Management Applications of Modern Control Theory, American Elsevier, New York.

COYLE, R. G., (1977), Management System Dynamics, John Wiley & Sons, Chinchester (U.K.).

HILLIER, F. S. y LIEBERMAN, G. J., (1967), Introduction to Operations Research, Holden Day, San Francisco.

INTRILIGATOR, M. D., (1971), Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ).

LILIEN, G. L. y KOTLER, P., (1983), Marketing Decision Making: A Model-Building Approach, Harper & Row, New York.

LILIEN, G. L. y RUZDIC, A. A., (1982), *Analyzing Natural Experiments in Industrial Markets*, en Marketing Planning Models, A. A. Zoltners (editor), North-Holland, New York, pp. 241-269.

NAYLOR, T. H. y VERNON, J. M., (1969), Microeconomics and Decision Models of the Firm, Harcourt, Brace & World, New York.

NERLOVE, M. y ARROW, K. J., (1962), *Optimal Advertising Policy Under Dynamic Conditions*, Economica, 39, pp. 129-142.

PONTRYAGIN, L. S., BOLTYANSKII, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. y MISCHENKO, E. F., (1962), The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley & Sons, New York.

SETHI, S. P., (1973), *Optimal Control of the Vidale-Wolfe Advertising Model*, Operations Research, 21, pp. 998-1013.

SETHI, S. P. y THOMPSON, G. L., (1981), Optimal Control Theory: Applications to Management Science, Martinus Nijhoff Publishing, Boston (MA).

TAPIERO, C. S., (1977), Managerial Planning: An Optimun and Stochastic Control Approach, Gordon Breach, New York.

TEICHROEW, D., (1964), An Introduction to Management Science Deterministic Models, John Wiley & Sons, New York.

VIDALE, M. L. y WOLFE, H. B., (1957), *An Operations Research Study of Sales Response to Advertising*, Operations Research, 5, pp. 370-381.